

文章编号:1005-3085(2010)06-1064-11

一类不连续系统的 Φ -变差稳定性*

邓 琳, 李宝麟

(西北师范大学数学与信息科学学院, 兰州 730070)

摘 要: 本文借助 Φ -有界变差函数理论, 讨论了一类不连续系统的 Φ -有界变差解的稳定性, 给出了该类不连续系统的 Φ -变差稳定、 Φ -变差吸引以及渐近 Φ -变差稳定的定义, 建立了 Φ -有界变差解 Φ -变差稳定性和渐近 Φ -变差稳定性的Lyapunov型定理。该结果是对一类不连续系统变差稳定性定理的本质推广。

关键词: 不连续系统; Φ -有界变差解; Φ -变差稳定性; 渐近 Φ -变差稳定性; Lyapunov函数

分类号: AMS(2000) 34A20; 34G10

中图分类号: O175.12

文献标识码: A

1 引言

考虑动态系统

$$x' = f(t, x), \quad (1)$$

其中

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, \quad x' = \frac{dx}{dt}, \quad f: G \rightarrow R^n.$$

G 是 R^{n+1} 中的开域。如果 (1) 式的右端函数 f 在 G 上具有某种不连续性, 则称系统 (1) 为不连续系统。文献 [1] 利用 Henstock 积分及其一类不等式, 讨论了不连续系统 (1) 的 Φ -有界变差解。文献 [2] 综述了不连续系统理论及其应用研究概况, 如 Carathéodory 系统和 Filippov 系统等解的存在性、唯一性、解对参数的连续依赖性以及稳定性的一些结果。 Φ -有界变差函数理论由 Musielak 及 Orlicz 等人在文献 [3-5] 中提出。此理论是通常意义下有界变差函数理论的推广与发展。

本文是文献 [1] 工作的后续工作, 在文献 [1] 工作的基础上讨论了不连续系统 Φ -有界变差解的稳定性, 建立了 Φ -变差稳定性和渐近 Φ -变差稳定性的 Lyapunov 型定理。这是对文献 [6] 中一类不连续系统有界变差解的变差稳定性结果的本质推广。

2 预备知识

本文中设 $\Phi(u)$ 是对 $u \geq 0$ 定义的连续不减函数, 满足 $\Phi(0) = 0$ 。对 $u > 0$, $\Phi(u) > 0$, 本文将用到以下条件:

(Δ_2) 存在 $u_0 \geq 0$ 及 $L > 0$, 使得对 $0 < u \leq u_0$, $\Phi(2u) \leq L\Phi(u)$;

(c) $\Phi(u)$ 是凸函数。

Musielak 及 Orlicz 等人在文献 [3-5] 中给出了 Φ -有界变差函数的定义:

收稿日期: 2009-05-11. 作者简介: 邓琳 (1984年9月生), 女, 硕士. 研究方向: 应用微分方程.

*基金项目: 国家自然科学基金 (10771171); 西北师范大学科技创新工程 (NWNKJCGC-212).

设 $[a, b] \subset R^1$, $-\infty < a < b < +\infty$. 考虑函数 $x: [a, b] \rightarrow R^n$, $x(t)$ 称为 $[a, b]$ 上的 Φ -有界变差函数, 是指对 $[a, b]$ 的任何分划

$$\pi: a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b, \quad V_\Phi(x; [a, b]) = \sup_\pi \sum_{i=1}^m \Phi(\|x(t_i) - x(t_{i-1})\|) < +\infty,$$

并称 $V_\Phi(x; [a, b])$ 为函数 $x(t)$ 在 $[a, b]$ 上的 Φ -变差。

用 BV_Φ 表示 $[a, b]$ 上所有 Φ -有界变差函数 $x(t)$, 满足 $x(a) = 0$ 组成的集合。如果 $\Phi(u)$ 满足 (Δ_2) 和 (c), 则 $(BV_\Phi, \|\cdot\|_\Phi)$ 在通常意义的函数加法和纯量乘法下是一个 Banach 空间。范数

$$\|x\|_\Phi = \inf \left\{ k > 0; V_\Phi\left(\frac{x}{k}; [a, b]\right) \leq 1 \right\}.$$

在以下的讨论中, 本文总是假定 $\Phi(u)$ 满足条件 (Δ_2) 和 (c). 给定 $c > 0$, 记 $B_c = \{x \in R^n; \|x\| < c\}$. 其中 $\|\cdot\|$ 为 n 维欧氏空间 R^n 中的范数

$$I = (a, b) \subset R^1, \quad -\infty < a < b < +\infty, \quad G = I \times B_c.$$

如果对任意的 $t \geq 0$, 有 $f(0, t) = 0$, 则称函数 $x(t) = 0 (t \geq 0)$ 是不连续系统 (1) 在整个半轴 $[0, +\infty)$ 上的解。

定义 2.1^[7] 设 $x(t): [a, b] \rightarrow R^n$ 是一个函数, 如果存在 $A \in R^n$, 使得对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在正值函数 $\delta(t): [a, b] \rightarrow (0, +\infty)$, 使得对 $[a, b]$ 的任何 δ -精细分划 $\Pi = \{[t_{i-1}, t_i], \xi_i\}_{i=1}^n$, 有

$$\left\| \sum_{i=1}^n x(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) - A \right\| < \varepsilon,$$

则称 $x(t)$ 在 $[a, b]$ 上 Henstock-Kurzweil 可积, 简称 H-K 可积, A 为积分值, 记作

$$\int_a^b x(t) dt = A.$$

定义 2.2^[1] 设函数 $f: G \rightarrow R^n$ 为 Carathéodory 函数, 称 $f: G \rightarrow R^n$ 属于 $V_\Phi(G, h, \omega)$, 如果 $f(t, x)$ 满足下列条件:

(i) 存在正值函数 $\delta: I \rightarrow (0, +\infty)$, 对每个区间 $[u, v]$, 满足 $\tau \in [u, v] \subset (\tau - \delta(\tau), \tau + \delta(\tau)) \subset I$ 以及 $x \in B_c$, 有

$$\|f(\tau, x)(v - u)\| \leq \Phi(h(v) - h(u)).$$

(ii) 对每个区间 $[u, v]$, 满足 $\tau \in [u, v] \subset (\tau - \delta(\tau), \tau + \delta(\tau)) \subset I$ 以及所有的 $x, y \in B_c$, 有

$$\|f(\tau, x) - f(\tau, y)\|(v - u) \leq \omega(\|x - y\|)\Phi(h(v) - h(u)),$$

其中 $h: I \rightarrow R^1$ 是定义在 I 上单调增加的左连续函数, 而 $\omega: [0, +\infty) \rightarrow R^1$ 是单调增加连续函数, 且 $\omega(r) > 0 (r > 0)$, $\omega(0) = 0$.

(iii) 对每个定义在 $[\alpha, \beta] \subset I$ 上的阶梯函数 $\varphi(t)$, $f(t, \varphi(t))$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上是 H-K 可积的。

定义 2.3^[1] 定义在区间 I 上的向量值函数 x 称为 Carathéodory 系统 (1) 的 Φ -有界变差解, 如果 x 满足:

(i) x 在 I 的任何紧子区间上是 Φ -有界变差的;

(ii) 当 $t \in I$ 时, $(t, x) \in G$;

(iii) $x' = f(t, x)$ 对几乎所有的 $t \in I$ 成立。当 x 又在 I 上连续时, 称 x 为 (1) 的连续 Φ -有界变差解。

引理 2.1^[7] 设 $-\infty < a < b < +\infty$, $f, g: [a, b] \rightarrow R$ 是 $[a, b]$ 上的左连续函数。若对任意 $\sigma \in [a, b]$, 存在 $\delta(\sigma) > 0$, 使对任意 $\eta \in (0, \delta(\sigma))$, 有不等式

$$f(\sigma + \eta) - f(\sigma) \leq g(\sigma + \eta) - g(\sigma),$$

则对任意 $s \in [a, b]$, 有 $f(s) - f(a) \leq g(s) - g(a)$ 。

引理 2.2^[1] 设 $f \in V_{\Phi}(G, h, \omega)$ 且 $(t_0, x_0) \in G$, 则存在 $d^-, d^+ > 0$, 使得不连续系统 (1) 在区间 $[t_0 - d^-, t_0 + d^+]$ 上存在一个 Φ -有界变差解, 满足 $x(t_0) = x_0$ 。

引理 2.3^[1] 设 $f \in V_{\Phi}(G, h, \omega)$, $x: [\alpha, \beta] \rightarrow R^n$, $[\alpha, \beta] \subseteq I$ 为 $[\alpha, \beta]$ 上的 Φ -有界变差函数且正则, 使得对每个 $t \in (\alpha, \beta)$, $(t, x(t)) \in G$, 则 H-K 积分

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t, x(t)) dt$$

存在。

3 主要结果及证明

为了给出本文的主要定理, 我们首先建立如下三个定义:

定义 3.1 如果对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得若 $y: [t_0, t_1] \rightarrow B_c$, $0 \leq t_0 < t_1 < +\infty$ 是 $[t_0, t_1]$ 上的 Φ -有界变差函数, 在 $(t_0, t_1]$ 上左连续, 当

$$\Phi(\|y(t_0)\|) < \delta, \quad V_{\Phi}\left(\left(y(s) - \int_{t_0}^s f(t, y(t)) dt\right); [t_0, t_1]\right) < \delta$$

时, 对任意 $t \in [t_0, t_1]$, 有 $\Phi(\|y(t)\|) < \varepsilon$, 则称系统 (1) 的解 $x \equiv 0$ 是 Φ -变差稳定的。

定义 3.2 若存在 $\delta_0 > 0$, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $T = T(\varepsilon) \geq 0$, $\gamma = \gamma(\varepsilon) > 0$, 使得若 $y: [t_0, t_1] \rightarrow B_c$, $0 \leq t_0 < t_1 < +\infty$ 是 $[t_0, t_1]$ 上的 Φ -有界变差函数, 在 $(t_0, t_1]$ 上左连续, 当

$$\Phi(\|y(t_0)\|) < \delta_0, \quad V_{\Phi}\left(\left(y(s) - \int_{t_0}^s f(t, y(t)) dt\right); [t_0, t_1]\right) < \gamma$$

时, 对任意的 $t \in [t_0, t_1] \cap [t_0 + T(\varepsilon), +\infty)$, $t_0 \geq 0$, 有 $\Phi(\|y(t)\|) < \varepsilon$, 则称系统 (1) 的解 $x \equiv 0$ 是 Φ -变差吸引的。

定义 3.3 若系统 (1) 的解 $x \equiv 0$ 既是 Φ -变差稳定的, 又是 Φ -变差吸引的, 则称解 $x \equiv 0$ 是渐近 Φ -变差稳定的。

定理 3.1 设有函数 $V: [0, +\infty) \times R^n \rightarrow R$, 对任意 $x \in R^n$, $V(\cdot, x): [0, +\infty) \rightarrow R$ 在 $(0, +\infty)$ 左连续, 且下列条件成立:

(i) 对任意 $x, y \in R^n$, $t \in [0, +\infty)$, $L > 0$ 为常数, 有

$$|V(t, x) - V(t, y)| \leq L\Phi(\|x - y\|). \quad (2)$$

(ii) 存在实函数 $H: R^n \rightarrow R$, 使得对不连续系统 (1) 在 $(\alpha, \beta) \subset [0, +\infty)$ 上的每一个有界变差解 $x: (\alpha, \beta) \rightarrow R^n$ 当 $t \in (\alpha, \beta)$ 时, 有

$$\lim_{\eta \rightarrow 0+} \sup \frac{V(t + \eta, x(t + \eta)) - V(t, x(t))}{\eta} \leq H(x(t)). \quad (3)$$

若 $y: [t_0, t_1] \rightarrow R^n$, $0 \leq t_0 < t_1 < +\infty$, 是 $[t_0, t_1]$ 上的 Φ -有界变差函数, 在 $(t_0, t_1]$ 左连续, 则有不等式

$$V(t_1, x(t_1)) \leq V(t_0, x(t_0)) + NV_{\Phi}\left(\left(y(s) - \int_{t_0}^s f(t, y(t))dt\right); [t_0, t_1]\right) + R(t_1 - t_0) \quad (4)$$

成立, 其中

$$R = \sup_{t \in [t_0, t_1]} H(y(t)), \quad N = L\chi(a'),$$

$\chi(a')$ 由文献 [4] 中定理 1.02 定义。

证明 设 $y: [t_0, t_1] \rightarrow R^n$, $0 \leq t_0 < t_1 < +\infty$ 是 $[t_0, t_1]$ 上的 Φ -有界变差函数, 在 $(t_0, t_1]$ 左连续。显然函数 $V(t, y(t)): [t_0, t_1] \times R^n \rightarrow R$ 在 $(t_0, t_1]$ 上左连续。

设 $\sigma \in [t_0, t_1]$, 若 $x: [\sigma, \sigma + \eta_1(\sigma)] \rightarrow R^n$ 是系统 (1) 在区间 $[\sigma, \sigma + \eta_1(\sigma)]$ 上的 Φ -有界变差解, $\eta_1 > 0$ 满足初始条件 $x(\sigma) = y(\sigma)$ 。解的存在性由引理 2.2 保证。由引理 2.3, 有

$$\int_{\sigma}^{\sigma+\eta_1(\sigma)} f(t, x(t))dt, \quad \int_{\sigma}^{\sigma+\eta_1(\sigma)} f(t, y(t))dt$$

存在, 由 (2) 式, 对每一个 $\eta \in [0, \eta_1(\sigma)]$, 有

$$\begin{aligned} & V(\sigma + \eta, y(\sigma + \eta)) - V(\sigma + \eta, x(\sigma + \eta)) \\ & \leq L\Phi(\|y(\sigma + \eta) - x(\sigma + \eta)\|) = L\Phi\left(\left\|y(\sigma + \eta) - y(\sigma) - \int_{\sigma}^{\sigma+\eta} f(t, x(t))dt\right\|\right). \end{aligned}$$

再由 (3) 式, 对任意 $\varepsilon > 0$, $\eta \in (0, \eta_2(\sigma))$, $\eta_2(\sigma) \leq \eta_1(\sigma)$, 且让 $\eta_2(\sigma) > 0$ 充分小, 有

$$\begin{aligned} & V(\sigma + \eta, y(\sigma + \eta)) - V(\sigma, x(\sigma)) \\ & = V(\sigma + \eta, y(\sigma + \eta)) - V(\sigma + \eta, x(\sigma + \eta)) + V(\sigma + \eta, x(\sigma + \eta)) - V(\sigma, x(\sigma)) \\ & \leq L\Phi\left(\left\|y(\sigma + \eta) - y(\sigma) - \int_{\sigma}^{\sigma+\eta} f(t, x(t))dt\right\|\right) + \eta H(x(\sigma)) \\ & \leq L\Phi\left(\left\|y(\sigma + \eta) - y(\sigma) - \int_{\sigma}^{\sigma+\eta} f(t, x(t))dt\right\|\right) + \eta R + \eta \varepsilon. \end{aligned}$$

定义

$$\Psi(s) = y(s) - \int_{t_0}^s f(t, y(t))dt, \quad s \in [t_0, t_1],$$

则函数 $\Psi: [t_0, t_1] \rightarrow R^n$ 是 $[t_0, t_1]$ 上的 Φ -有界变差函数且在 $(t_0, t_1]$ 上左连续。因此上述不等式可继续化为

$$\begin{aligned} & V(\sigma + \eta, y(\sigma + \eta)) - V(\sigma, x(\sigma)) \\ & \leq L\Phi\left(\left\|y(\sigma + \eta) - y(\sigma) - \int_{\sigma}^{\sigma+\eta} f(t, y(t))dt\right\|\right) \\ & \quad + L\Phi\left(\left\|\int_{\sigma}^{\sigma+\eta} [f(t, y(t)) - f(t, x(t))]dt\right\|\right) + \eta R + \eta \varepsilon \\ & \leq N(V_{\Phi}(\Psi; [t_0, \sigma + \eta]) - V_{\Phi}(\Psi; [t_0, \sigma])) + \eta R + \eta \varepsilon \\ & \quad + N\Phi\left(\left\|\int_{\sigma}^{\sigma+\eta} [f(t, y(t)) - f(t, x(t))]dt\right\|\right). \end{aligned} \quad (5)$$

考察(5)式的最后一项。因为 $f \in V_{\Phi}(G, h, \omega)$, 所以对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在正值函数 $\delta: [\sigma, \sigma + \eta] \rightarrow (0, +\infty)$, 使对 $[\sigma, \sigma + \eta]$ 的任何 δ -精细分划,

$$D = \{(\tau_j; [\alpha_{j-1}, \alpha_j]), j = 1, 2, \dots, m\},$$

从而令 $M(t) = V_{\Phi}(h; [\sigma, t])$, $\sigma \leq t \leq \sigma + \eta$, 由 $\Phi(u)$ 及 h 的定义, $M(t)$ 为 $[\sigma, \sigma + \eta]$ 上的非负不减左连续函数, 有

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{\sigma}^{\sigma+\eta} [f(t, y(t)) - f(t, x(t))] dt \right\| \\ & \leq \left\| \int_{\sigma}^{\sigma+\eta} [f(t, y(t)) - f(t, x(t))] dt - \sum_{j=1}^m [f(\tau_j, y(\tau_j)) - f(\tau_j, x(\tau_j))] (\alpha_j - \alpha_{j-1}) \right\| \\ & \quad + \left\| \sum_{j=1}^m [f(\tau_j, y(\tau_j)) - f(\tau_j, x(\tau_j))] (\alpha_j - \alpha_{j-1}) \right\| \\ & < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{j=1}^m \omega(\|y(\tau_j) - x(\tau_j)\|) \Phi(|h(\alpha_j) - h(\alpha_{j-1})|) \\ & < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{j=1}^m \omega(\|y(\tau_j) - x(\tau_j)\|) (M(\alpha_j) - M(\alpha_{j-1})) \\ & \quad - \int_{\sigma}^{\sigma+\eta} \omega(\|y(\tau) - x(\tau)\|) dM(\tau) + \int_{\sigma}^{\sigma+\eta} \omega(\|y(\tau) - x(\tau)\|) dM(\tau) \\ & < \varepsilon + \int_{\sigma}^{\sigma+\eta} \omega(\|y(\tau) - x(\tau)\|) dM(\tau) \\ & = \varepsilon + \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \left[\int_{\sigma}^{\sigma+\alpha} \omega(\|y(\tau) - x(\tau)\|) dM(\tau) + \int_{\sigma+\alpha}^{\sigma+\eta} \omega(\|y(\tau) - x(\tau)\|) dM(\tau) \right] \\ & = \varepsilon + \omega(\|y(\sigma) - x(\sigma)\|) (M(\sigma+) - M(\sigma)) + \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \int_{\sigma+\alpha}^{\sigma+\eta} \omega(\|y(\tau) - x(\tau)\|) dM(\tau) \\ & \leq \varepsilon + \sup_{\rho \in [\sigma, \sigma+\eta]} \omega(\|y(\rho) - x(\rho)\|) \lim_{\alpha \rightarrow 0+} (M(\sigma+\eta) - M(\sigma+\alpha)) \\ & = \varepsilon + \sup_{\rho \in [\sigma, \sigma+\eta]} \omega(\|y(\rho) - x(\rho)\|) (M(\sigma+\eta) - M(\sigma+)). \end{aligned} \quad (6)$$

对 $\rho \in [\sigma, \sigma + \eta_2(\sigma)]$, 有

$$y(\rho) - x(\rho) = y(\rho) - y(\sigma) - \int_{\sigma}^{\rho} f(t, x(t)) dt,$$

因此

$$\lim_{\rho \rightarrow \sigma+} (y(\rho) - x(\rho)) = y(\sigma+) - y(\sigma) - \lim_{\rho \rightarrow \sigma+} \int_{\sigma}^{\rho} f(t, x(t)) dt = \Psi(\sigma+) - \Psi(\sigma).$$

所以

$$\lim_{\rho \rightarrow \sigma+} \|y(\rho) - x(\rho)\| = \|\Psi(\sigma+) - \Psi(\sigma)\|. \quad (7)$$

令

$$\beta = \frac{\varepsilon}{N(U(t_1) - U(t_0) + 1)} > 0, \quad (8)$$

并设 $r = r(\beta) > 0$, 使 $\omega(r) < \beta$, 选 $\alpha \in (0, \frac{r}{2})$, 由 (7) 式, 存在一个 $\eta_3(\sigma) \in (0, \eta_2(\sigma))$, 对任意 $\rho \in (\sigma, \sigma + \eta_3(\sigma))$, 有

$$\|y(\rho) - x(\rho)\| \leq \|\Psi(\sigma+) - \Psi(\sigma)\| + \alpha,$$

则

$$\omega(\|y(\rho) - x(\rho)\|) \leq \omega(\|\Psi(\sigma+) - \Psi(\sigma)\| + \alpha). \quad (9)$$

定义

$$P(\beta) = \left\{ \sigma \in [t_0, t_1]; \|\Psi(\sigma+) - \Psi(\sigma)\| \geq \frac{r}{2} \right\},$$

Ψ 在 $[t_0, t_1]$ 上 Φ -有界变差, 集合 $P(\beta)$ 有限, 用 $n(\beta)$ 表示集合 $P(\beta)$ 中元素的个数, 若 $\sigma \in [t_0, t_1] \setminus P(\beta)$ 且 $\rho \in (\sigma, \sigma + \eta_3(\sigma))$, 那么由 (9) 式, 有

$$\omega(\|y(\rho) - x(\rho)\|) \leq \omega(\|\Psi(\sigma+) - \Psi(\sigma)\| + \alpha) \leq \omega\left(\frac{r}{2} + \alpha\right) < \omega\left(\frac{r}{2} + \frac{r}{2}\right) = \omega(r) < \beta.$$

当 $\eta \in (0, \eta_3(\sigma))$ 时, 由 (6) 式, 有

$$\left\| \int_{\sigma}^{\sigma+\eta} [f(t, y(t)) - f(t, x(t))] dt \right\| \leq \beta(M(\sigma + \eta) - M(\sigma)). \quad (10)$$

若 $\sigma \in [t_0, t_1] \cap P(\beta)$, 则存在 $\eta_4(\sigma) \in (0, \eta_3(\sigma))$, 使对任意 $\eta \in (0, \eta_4(\sigma))$, 有

$$M(\sigma + \eta) - M(\sigma) = |M(\sigma + \eta) - M(\sigma)| < \frac{\beta}{(n(\beta) + 1)\omega(\|\Psi(\sigma+) - \Psi(\sigma)\| + \alpha)},$$

且 $(\sigma, \sigma + \eta_4(\sigma)) \cap P(\beta) = \emptyset$, 因此对每一个 $\eta \in (\sigma, \sigma + \eta_4(\sigma))$, 由 (6), (9) 式, 有

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{\sigma}^{\sigma+\eta} [f(t, y(t)) - f(t, x(t))] dt \right\| \\ & \leq \omega(\|\Psi(\sigma+) - \Psi(\sigma)\| + \alpha) \frac{\beta}{(n(\beta) + 1)\omega(\|\Psi(\sigma+) - \Psi(\sigma)\| + \alpha)} = \frac{\beta}{n(\beta) + 1}. \end{aligned} \quad (11)$$

定义

$$\widetilde{M}_{\alpha}(t) = \frac{\beta}{n(\beta) + 1} \sum_{\sigma \in P(\beta)} I_{\sigma}(t), \quad t \in [t_0, t_1],$$

当 $t \leq \sigma$ 时, $I_{\sigma}(t) = 0$; 当 $t > \sigma$ 时, $I_{\sigma}(t) = 1$, $\widetilde{M}_{\alpha} : [t_0, t_1] \rightarrow R$ 是不减左连续函数, 且

$$\widetilde{M}_{\alpha}(t_1) - \widetilde{M}_{\alpha}(t_0) = \frac{\beta}{n(\beta) + 1} n(\beta) < \beta. \quad (12)$$

显然 \widetilde{M}_{α} 不连续点仅在集合 $P(\beta)$ 内, 且对 $t \in P(\beta)$, 有

$$\widetilde{M}_{\alpha}(t+) - \widetilde{M}_{\alpha}(t) = \frac{\beta}{n(\beta) + 1}, \quad t \in [t_0, t_1],$$

由函数 \widetilde{M}_α , 可设 $M_\alpha(t) = \beta M_c(t) + \widetilde{M}_\alpha(t)$, 其中 M_c 表示函数 M 的连续部分, 则 M_α 为 $[t_0, t_1]$ 上不减左连续函数, 且由 (8), (12) 式, 可得

$$\begin{aligned} M_\alpha(t_1) - M_\alpha(t_0) &= \beta(M_c(t_1) - M_c(t_0)) + \widetilde{M}_\alpha(t_1) - \widetilde{M}_\alpha(t_0) \\ &< \beta[M(t_1) - M(t_0) + 1] = \frac{\varepsilon}{N}. \end{aligned} \quad (13)$$

若 $\sigma \in [t_0, t_1] \setminus P(\beta)$, 则设 $\delta(\sigma) = \eta_3(\sigma) > 0$; 若 $\sigma \in [t_0, t_1] \cap P(\beta)$, 则设 $\delta(\sigma) = \eta_4(\sigma) > 0$; 当 $\sigma \in [t_0, t_1]$, $\eta \in [0, \delta(\sigma)]$ 时, 由 (10), (11) 式及 M_α 的定义, 可得

$$\left\| \int_{\sigma}^{\sigma+\eta} [f(t, y(t)) - f(t, x(t))] dt \right\| \leq M_\alpha(\sigma + \eta) - M_\alpha(\sigma),$$

因此, 由文献 [3] 中定理 1.03, 定理 1.17, 有

$$\begin{aligned} &\Phi\left(\left\| \int_{\sigma}^{\sigma+\eta} [f(t, y(t)) - f(t, x(t))] dt \right\|\right) \\ &\leq \Phi(M_\alpha(\sigma + \eta) - M_\alpha(\sigma)) = V_\Phi(M_\alpha; [\sigma, \sigma + \eta]) \\ &\leq V_\Phi(M_\alpha; [t_0, \sigma + \eta]) - V_\Phi(M_\alpha; [t_0, \sigma]). \end{aligned}$$

故当 $\sigma \in [t_0, t_1]$, $\eta \in [0, \delta(\sigma)]$, 由 (5) 式, 有

$$\begin{aligned} &(\sigma + \eta, y(\sigma + \eta)) - V(\sigma, x(\sigma)) \\ &\leq N(V_\Phi(\Psi; [t_0, \sigma + \eta]) - V_\Phi(\Psi; [t_0, \sigma])) + V_\Phi(M_\alpha; [t_0, \sigma + \eta]) - V_\Phi(M_\alpha; [t_0, \sigma]) + \eta R + \eta \varepsilon \\ &= G(\sigma + \eta) - G(\sigma), \end{aligned} \quad (14)$$

其中

$$G(t) = NV_\Phi(\Psi; [t_0, t]) + R(t - t_0) + \varepsilon(t - t_0) + NV_\Phi(U_\alpha; [t_0, t]),$$

G 是 $[t_0, t_1]$ 上的左连续函数. 由引理 2.1 及 (13), (14) 式, 可得

$$\begin{aligned} &V(t_1, y(t_1)) - V(t_0, y(t_0)) \\ &\leq G(t_1) - G(t_0) \\ &= NV_\Phi(\Psi; [t_0, t_1]) + R(t_1 - t_0) + \varepsilon(t_1 - t_0) + NV_\Phi(M_\alpha; [t_0, t_1]) \\ &< NV_\Phi(\Psi; [t_0, t_1]) + R(t_1 - t_0) + \varepsilon(t_1 - t_0) + N\Phi\left(\frac{\varepsilon}{N}\right), \end{aligned}$$

由 ε 的任意性可得 (4) 式.

证毕

定理 3.2 设有函数

$$V : [0, +\infty) \times \bar{B}_a \rightarrow R, \quad \bar{B}_a = \{y \in R^n : \|y\| \leq a\}, \quad 0 < a < c,$$

对任意 $x \in \bar{B}_a$, $V(\cdot, x)$, 左连续. 设函数 $V(t, x)$ 是正定的, 即

(i) 存在一个连续递增实函数 $v : [0, +\infty) \rightarrow R$, 使得 $v(\rho) = 0 \iff \rho = 0$;

(ii) 对任意 $(t, x) \in [0, +\infty) \times \bar{B}_a$, 有

$$V(t, x) \geq v(\Phi(\|x\|)), \quad (15)$$

$$V(t, 0) = 0, \quad (16)$$

对任意 $x, y \in \bar{B}_a$, $L > 0$ 是常数, 有

$$|V(t, x) - V(t, y)| \leq L\Phi(\|x - y\|). \quad (17)$$

若函数 $V(t, x(t))$ 对不连续系统 (1) 任何一个 Φ -有界变差解 $x(t) : [\alpha, \beta] \rightarrow R^n$ 是不增函数, 则系统 (1) 的解 $x \equiv 0$ 是 Φ -变差稳定的.

证明 由假设, 函数 $V(t, x(t))$ 对不连续系统 (1) 的任何一个 Φ -有界变差解 $x(t) : [\alpha, \beta] \rightarrow R^n$ 是不增函数, 因此

$$\limsup_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{V(t + \eta, x(t + \eta)) - V(t, x(t))}{\eta} \leq 0, \quad t \in [\alpha, \beta]. \quad (18)$$

设 $\varepsilon > 0$, 若 $y : [t_0, t_1] \rightarrow R^n$, $0 \leq t_0 < t_1 < +\infty$ 是 $[t_0, t_1]$ 上的 Φ -有界变差函数, 在 $(t_0, t_1]$ 左连续. 函数 V 满足定理 3.1 中的 (3) 式 (取 $H \equiv 0$), 因此由 (4), (16), (17) 式, 对任意 $r \in [t_0, t_1]$, 有

$$\begin{aligned} V(r, y(r)) &\leq V(t_0, y(t_0)) + NV_\Phi\left(\left(y(s) - \int_{t_0}^s f(t, y(t))dt\right); [t_0, r]\right) \\ &\leq L\Phi(\|y(t_0)\|) + NV_\Phi\left(\left(y(s) - \int_{t_0}^s f(t, y(t))dt\right); [t_0, r]\right) \\ &\leq N\Phi(\|y(t_0)\|) + NV_\Phi\left(\left(y(s) - \int_{t_0}^s f(t, y(t))dt\right); [t_0, r]\right). \end{aligned} \quad (19)$$

定义 $\alpha(\varepsilon) = \inf_{r \leq \varepsilon} v(r)$, 则

$$\alpha(\varepsilon) > 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \alpha(\varepsilon) = 0.$$

设 $\delta(\varepsilon) > 0$, 使得 $2N\delta(\varepsilon) < \alpha(\varepsilon)$. 若在这种情况下, 函数 y 满足

$$\Phi(\|y(t_0)\|) < \delta(\varepsilon), \quad V_\Phi\left(\left(y(s) - \int_{t_0}^s f(t, y(t))dt\right); [t_0, t_1]\right) < \delta(\varepsilon),$$

则由 (19) 式, 可得

$$V(r, y(r)) \leq 2N\delta(\varepsilon) < \alpha(\varepsilon), \quad r \in [t_0, t_1]. \quad (20)$$

若存在一个 $\tilde{t} \in [t_0, t_1]$, 使得 $\Phi(\|y(\tilde{t})\|) \geq \varepsilon$, 则由 (15) 式, 有

$$V(\tilde{t}, y(\tilde{t})) \geq v(\Phi(\|y(\tilde{t})\|)) \geq \inf_{r \leq \varepsilon} v(r) = \alpha(\varepsilon),$$

这与 (20) 式矛盾!

因此, 对所有的 $t \in (t_0, t_1]$, 有 $\Phi(\|y(t)\|) < \varepsilon$, 由定义 3.1, 系统 (1) 的解 $x \equiv 0$ 是 Φ -变差稳定的.

证毕

定理 3.3 设函数 $V : [0, +\infty) \times \bar{B}_a \rightarrow R$ 满足定理 3.2 中的条件。若对系统 (1) 的任何一个 Φ -有界变差解 $x : [t_0, t_1] \rightarrow \bar{B}_a$, 当 $t \in [t_0, t_1]$ 时, 有

$$\lim_{\eta \rightarrow 0+} \sup \frac{V(t+\eta, x(t+\eta)) - V(t, x(t))}{\eta} \leq -H(x(t)), \quad (21)$$

其中 $H : R^n \rightarrow R$ 连续, $H(0) = 0$, $H(x) > 0 (x \neq 0)$, 则系统 (1) 的解 $x \equiv 0$ 是渐近 Φ -变差稳定的。

证明 由 (21) 式知函数 $V(t, x(t))$ 对不连续系统 (1) 的任何一个 Φ -有界变差解 $x(t)$ 是不增函数, 由定理 3.2, 系统 (1) 的解 $x \equiv 0$ 是 Φ -变差稳定的。

下面只需证明系统 (1) 的解 $x \equiv 0$ 是 Φ -变差吸引的即可。

由 $x \equiv 0$ 是 Φ -变差稳定的可知, 存在一个 $\delta_0 \in (0, \Phi(a))$, 若 $y : [t_0, t_1] \rightarrow R^n$, $0 \leq t_0 < t_1 < +\infty$ 是 $[t_0, t_1]$ 上的 Φ -有界变差函数, 在 $(t_0, t_1]$ 左连续, 使 $\Phi(\|y(t_0)\|) < \delta_0$, 且

$$V_{\Phi} \left(\left(y(s) - \int_{t_0}^s f(t, y(t)) dt \right); [t_0, t_1] \right) < \delta_0,$$

则对所有 $t \in [t_0, t_1]$, 有 $\Phi(\|y(t)\|) < \Phi(a)$, 由函数 $\Phi(u)$ 的定义知, $\|y(t)\| < a$, 即对所有 $t \in (t_0, t_1]$, 有 $y(t) \in \bar{B}_a$ 。

对任意 $\varepsilon > 0$, 由解 $x \equiv 0$ 的稳定性的知, 存在 $\delta(\varepsilon) > 0$, 对每一个 $y : [t_0, t_1] \rightarrow R^n$, $0 \leq t_0 < t_1 < +\infty$ 是 $[t_0, t_1]$ 上的 Φ -有界变差函数, 在 $[t_0, t_1]$ 左连续。若满足 $\Phi(\|y(t_0)\|) < \delta(\varepsilon)$, 且

$$V_{\Phi} \left(\left(y(s) - \int_{t_0}^s f(t, y(t)) dt \right); [t_0, t_1] \right) < \delta(\varepsilon),$$

则对所有 $t \in [t_0, t_1]$, 有 $\Phi(\|y(t)\|) < \varepsilon$ 。

令

$$\gamma(\varepsilon) = \min(\delta_0, \delta(\varepsilon)), \quad T(\varepsilon) = -N \frac{\delta_0 + \gamma(\varepsilon)}{R} > 0,$$

其中

$$R = \sup \{ -H(x) : \gamma(\varepsilon) \leq \Phi(\|x\|) < \varepsilon \} = -\inf \{ H(x) : \gamma(\varepsilon) \leq \Phi(\|x\|) < \varepsilon \} < 0.$$

若 $y : [t_0, t_1] \rightarrow R^n$ 是 $[t_0, t_1]$ 上的 Φ -有界变差函数, 在 $(t_0, t_1]$ 左连续, 使 $\Phi(\|y(t_0)\|) < \delta_0$, 且

$$V_{\Phi} \left(\left(y(s) - \int_{t_0}^s f(t, y(t)) dt \right); [t_0, t_1] \right) < \gamma(\varepsilon). \quad (22)$$

设 $T(\varepsilon) < t_1 - t_0$, 即 $t_0 + T(\varepsilon) < t_1$, 下面证明存在一个 $t^* \in [t_0, t_0 + T(\varepsilon)]$, 使得 $\Phi(\|y(t^*)\|) < \gamma(\varepsilon)$ 。反设不成立, 即对所有 $s \in [t_0, t_0 + T(\varepsilon)]$, 有 $\Phi(\|y(s)\|) \geq \gamma(\varepsilon)$, 则由定理 3.1, 有

$$\begin{aligned} & V(t_0 + T(\varepsilon), y(t_0 + T(\varepsilon))) - V(t_0, y(t_0)) \\ & \leq NV_{\Phi} \left(\left(y(s) - \int_{t_0}^s f(t, y(t)) dt \right); [t_0, t_0 + T(\varepsilon)] \right) + RT(\varepsilon) \\ & < N\gamma(\varepsilon) + R \frac{-N(\delta_0 + \gamma(\varepsilon))}{R} = -N\delta_0. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} & V(t_0 + T(\varepsilon), y(t_0 + T(\varepsilon))) \\ & \leq V(t_0, y(t_0)) - N\delta_0 \leq L\Phi(\|y(t_0)\|) - N\delta_0 \\ & \leq N\Phi(\|y(t_0)\|) - N\delta_0 < (N - N)\delta_0 = 0, \end{aligned}$$

这与不等式

$$V(t_0 + T(\varepsilon), y(t_0 + T(\varepsilon))) \geq v(\Phi(\|y(t_0 + T(\varepsilon))\|)) \geq v(\gamma(\varepsilon)) > 0$$

矛盾! 因此一定存在 $t^* \in [t_0, t_0 + T(\varepsilon)]$, 使得 $\Phi(\|y(t^*)\|) < \gamma(\varepsilon)$ 。又由 (22) 式, 对所有 $t \in [t^*, t_1]$, 有 $\Phi(\|y(t)\|) < \varepsilon$, 因而对 $t > t_0 + T(\varepsilon)$, 也有 $\Phi(\|y(t)\|) < \varepsilon$, 从而系统 (1) 的解 $x \equiv 0$ 是 Φ -变差吸引的。 证毕

注 对所定义的函数 $\Phi(u)$, 如果

$$0 < \frac{\Phi(u)}{u} < +\infty,$$

则有 $BV_\Phi[\alpha, \beta] = BV[\alpha, \beta]$, 其中 $BV_\Phi[\alpha, \beta]$ 及 $BV[\alpha, \beta]$ 分别表示通常意义下 $[\alpha, \beta]$ 上的 Φ -有界变差函数全体和 $[\alpha, \beta]$ 上的有界变差函数全体。所以, 在此情形下, 本文主要结果等价于文献 [6] 中变差稳定性的有关结果。如果

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\Phi(u)}{u} = 0,$$

有 $BV[\alpha, \beta] \subset BV_\Phi[\alpha, \beta]$ 。例如 $\Phi(u) = u^p$ ($1 < p < +\infty$), 有

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\Phi(u)}{u} = 0,$$

所以本文主要结果是文献 [6] 中变差稳定性结果的本质推广。

参考文献:

- [1] 肖艳萍, 李宝麟. 一类不连续系统的 Φ -有界变差解[J]. 工程数学学报, 2008, 25(3): 489-494
Xiao Y P, Li B L. Bounded Φ -variation solutions to a kind of discontinuous systems[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2008, 25(3): 489-494
- [2] 贺建勋, 陈彭年. 不连续微分方程的某些理论与应用[J]. 数学进展, 1987, 16(1): 17-32
He J X, Chen P N. Theory and application of certain discontinuous differential equations[J]. Advances in Mathematics, 1987, 16(1): 17-32
- [3] Musielak J, Orlicz W. On generalized variation(I)[J]. Studia Math, 1959, 18: 11-41
- [4] Lesniewz R, Orlicz W. On generalized variation(II)[J]. Studia Math, 1973, 45: 71-109
- [5] Musielak J, Orlicz W. On space of functions of finite generalized variation[J]. Bull Acad Pol Soc C III, 1957, 5: 389-392
- [6] 李宝麟, 尚德泉. 一类不连续系统的变差稳定性[J]. 西北师范大学学报, 2006, 42(2): 1-3
Li B L, Shang D Q. Variational stability for a class of discontinuous systems[J]. Journal of Northwest Normal University, 2006, 42(2): 1-3
- [7] Schwabik S. Generalized Ordinary Differential Equations[M]. Singapore: World Scientific, 1992

Φ -Variational Stability for a Class of Discontinuous Systems

DENG Lin, LI Bao-lin

(College of Mathematics and Information Science, Northwest Normal University, Lanzhou 730070)

Abstract: By using the bounded Φ -variation function, the stability of the bounded Φ -variation solution to a class of discontinuous systems is discussed. With respect to this kind of discontinuous systems, the Φ -variational stability, the Φ -variational attraction and asymptotically Φ -variational stability are defined. The Lyapunov type theorems for the Φ -variational stability and asymptotically Φ -variational stability of the bounded Φ -variation solutions are established. This result is an essential generalization of the variational stability theorem for a class of discontinuous systems.

Keywords: discontinuous system; bounded Φ -variation solution; Φ -variational stability; asymptotically Φ -variational stability; Lyapunov function

Received: 11 May 2009. **Accepted:** 07 Sep 2009.

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (10771171); the Science and Technology Innovation Project of Northwest Normal University (NWNKJXGC-212).